Zum Bildsystem *Teilermengen Oktogone*

Gesucht sind alle **Teilermengen T n**, deren Elemente Seitenlängen von Oktogonen darstellen.

Die Mächtigkeit einer Teilermenge ist gleich dem Produkt aus den um 1 vermehrten Exponenten aus der Primfaktorzerlegung von n.

Es gibt 3 Möglichkeiten, dass eine Teilermenge T **n** die Mächtigkeit 8 besitzt:

1.) $\mathbf{n = p^7}$ 2.) $\mathbf{n = p^3 \cdot q}$ 3.) $\mathbf{n = p \cdot q \cdot r}$ **(p , q , r prim)**

Acht Zahlen z1, z2 ,z3, z4, z5, z6, z7, z8 sind genau dann die Seitenlängen eines Oktogons, wenn es zwei Vierergruppen gibt, bei denen aus den vier Zahlen zwei wertgleiche Summen gebildet werden können.

Z.B. z1, z2, z3, z4 bilden die Summen z1 = z2+z3+z4 oder z1+z2=z3+z4 und
z5, z6, z7, z8 bilden die Summen z5 = z6+z7+z8 oder z5+z6=z7+z8.

Zu 1)

$$T_p^7 = \{1; p; p^2; p^3; p^4; p^5; p^6; p^7\}$$

Die Summe der ersten 7 Elemente der Menge ist eine Geometrische Reihe mit dem Summenwert

$$\frac{p^7 - 1}{p - 1}$$

Da dieser Summenwert kleiner ist als p^7, kann aus der Teilermenge kein Oktogon entstehen.

Zu 2)

$T_{p^3 q} = \{ 1, p, p^2, p^3, q, q p, q p^2, q p^3 \}$

$1+p+p^2+p^3 = \mathbf{(p^4 - 1) : (p - 1)}$; $q + q p + q p^2 = \mathbf{q \; (p^3 - 1) : (p - 1)}$

Oktogonbedingung:

$$q p^3 < (p^4 - 1) : (p - 1) + q\,(p^3 - 1) : (p - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad q p^3 (p - 1) < (p^4 - 1) + q \; (p^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad q p^3 (p - 1) - q\,(p^3 - 1) < (p^4 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad q\,(p^4 - p^3 - p^3 + 1) < (p^4 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{q < \frac{p^4 - 1}{p^4 - 2p^3 + 1}}$$

Oktogone können nur entstehen, wenn die Ungleichung **nicht** $q < 2$ ergibt, d.h. wenn

$$P^4 - 1 >= 2\,(p^4 - 2 p^3 + 1)$$

$\Leftrightarrow$ $4\,\mathbf{p^3} - 3 >= p\;\mathbf{p^3}$**.** Da die Ungleichung nur für $p < 4$ erfüllt ist, können nur für $p=2$ und $p=3$ Oktogone entstehen.

Für p = 3 ergibt die rote Ungleichung $q < 2{,}8$, also **nur q = 2 als mögliche Zahl für ein Oktogon.**
Für p = 2 ergibt die Ungleichung: $q < 15$, also **nur 3,5,7 oder 11 als mögliche Zahlen für ein Oktogon**.

$T_{2^3 * 11} = \{ 1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88 \}$ kann keine Oktogone erzeugen, da 88 > 44 + 22+ 11 und damit unter Einbeziehung von 88 keine zwei wertgleichen Summen mit zusammen vier Summanden möglich sind.

$T_{2^3 * 7} = \{ 1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$ und $T_{2^3 * 5} = \{ 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40 \}$ können ebenso keine Oktogone erzeugen, da 56 > 28 + 14 + 8 bzw. 40 > 20 + 10 +8.

$T_{2^3 * 3} = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 \}$ erzeugt Oktogone, da 24 = 4 + 8 + 12 und 6 = 1 + 2 + 3 .

$T_{3^3 * 2} = \{ 1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54\}$ erzeugt Oktogone, da 54 = 27 + 18 + 9 und 6 = 1 + 2 + 3.

Zu 3) Die Zahlen werden nach Größe geordnet aufgeschrieben.

Fall1) $r < p\,q$; $T_{p\,q\,r} = \{ 1; p; q; r; p\,q; p\,r; q\,r; p\,q\,r \}$

Fall2) $r > p\,q$; $T_{p\,q\,r} = \{ 1; p; q; p\,q; r; p\,r; q\,r; p\,q\,r \}$

Da die größte Zahl nicht größer als die Summe der drei nächst größeren Zahlen sein darf, muss die folgende Ungleichung erfüllt sein:

Zu Fall1: $\mathbf{p\,q\,r <= p\,q + p\,r + q\,r}$

$\Leftrightarrow \quad 3\,(p\,q\,r) <= 3\,p\,q + 3\,p\,r + 3\,q\,r$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(p\,q + p\,q + \dots + p\,q)}_{r\ \text{Summanden}} + \underbrace{(p\,r + p\,r + \dots .\, p\,r)}_{q\ \text{Summanden}} + \underbrace{(q\,r + q\,r + \dots + q\,r)}_{p\ \text{Summanden}} <= 3\,p\,q + 3\,p\,r + 3\,q\,r$

Eine Lösung ist für p>2 unmöglich.

Damit muss jetzt erfüllt sein:

$$2\,q\,r + 2\,r\,q + 2\,q\,r <= 6\,q + 6\,r + 3\,q\,r$$

$\Leftrightarrow \quad 3\,r\,q <= 6\,q + 6\,r$

$\Leftrightarrow \quad q\,r <= 2\,q + 2\,r$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{r + r + \dots + r}_{(q-2)\ \text{Summanden}} <= 2\,q$

nur für q < 4 kann die Ungleichung erfüllt werden, da r > q.

Also gilt: p = 2 ; q = 3 und r = 5 (r < p q)

T_{2*3*5} = { 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30} erzeugt Oktogone, da 30 = 15 + 10 + 5 und 6 = 3 + 2 + 1.

Zu Fall 2: $\mathbf{p\,q\,r <= r + p\,r + q\,r}$

$\Leftrightarrow \quad p\,q <= 1 + p + q$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{q + q + \dots + q}_{p\ \text{Summanden}} <= 1 + p + q$

Die Ungleichung ist höchstens für **p = 2** erfüllbar. Dann gilt:

$$2\,q <= 1 + p + q$$

$\Leftrightarrow \quad q <= 1 + p$

Die Ungleichung ist nur für **q = 3** erfüllbar.

$\mathbf{T_{2*3*p}}$ **= { 1; 2; 3; 6; p; 2 p; 3 p; 6 p }** schließt für p = 5 den 1. Fall ein und erzeugt für alle Primzahlen p > 3 Oktogone, denn 6 p = p + 2 p + 3 p und 6 = 1 + 2 + 3.

Die Oktogon Teilermengen sind somit $\mathbf{T_{6\,p}}$ (p >3, prim) , $\mathbf{T_{24}}$ und $\mathbf{T_{54}}$.

T 24 = T 6 • 4 = { 1; 2; 3; 6; 1• 4; 2 • 4; 3 • 4; 6 • 4 }

T 54 = T 6 • 9 = { 1; 2; 3; 6; 1•9; 2 • 9; 3 • 9; 6 • 9}

T 6 • p = { 1; 2; 3; 6; 1• p; 2 • p; 3 • p; 6 • p}

Damit lässt sich vereinheitlichend sagen:

Die einzige Oktogon – Teilermenge ist T 6 • p , mit p (prim) > 3 , p = 4 und p = 9 .

Die Oktogon -Teilermenge besitzt nur diese Oktogon -Zerlegung: **6 ; 1 + 2 + 3 und 6 p ; p + 2 p + 3 p.**

Die Teilermengen Oktogon – Zerlegung erzeugt genau ½ • 3! • 4! = 72 auch nach Spiegelung nicht kongruente Oktogone, von denen genau 36 einfach und 36 einmal überschlagen sind.

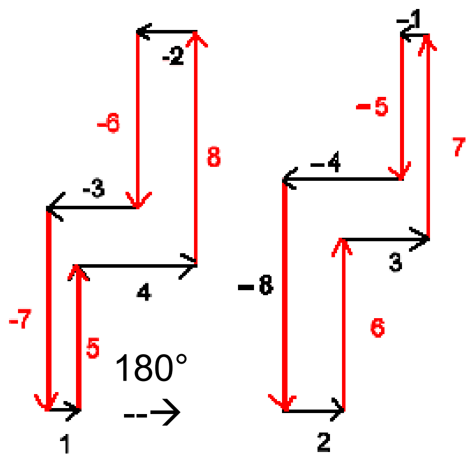
Die folgende Tabelle enthält die einfachen und einmal überschlagenen Oktogone geordnet nach ihrem Flächeninhalt

Die Hälfte der Oktogone wurde um 180° gedreht, um eine einheitliche Ausrichtung zu erhalten. Dazu genügt es, alle Zahlen eines Oktogontupels mit (-1) zu multiplizieren: (180° steht für die entsprechende Änderung des betreffenden 8-Tupels der Tabelle.)

(1 5 4 8 -2 -6 -3 -7) $\xrightarrow{180°}$ (-1 -5 -4 -8 2 6 3 7)

allgemein:

(x1 y1 x2 y2 x3 y3 x4 y4) $\xrightarrow{180°}$ (-x1 -y1 -x2 -y2 –x3 -y3 -x4 -y4)



T6p	einfach			überschlagen		
	x1,x2,x3,x4 horizontal	y1,y2,y3,y4 vertikal * p	A(O) * p	x1,x2,x3,x4 horizontal	y1,y2,y3,y4 vertikal * p	A(O) * p
1	1, 2, 3 , - 6	3, 2, 1, -6	15	1, 2, -6, 3	´-6, 2, 1, 3	11
2	´-1, - 2, -3, 6	´-2, -3, -1, 6	17	´-1, -2, -3, 6	6, - 2, -1, - 3	12
3	´-1, -3, - 2, 6	´-3, - 2, -1, 6	17	´-1, -2, 6, -3	´-3, -1, - 2, 6	12
4	´-1, - 2, -3, 6	´-3, -1, - 2, 6	18	´-1, - 2, 6, -3	´-3, -2, -1, 6	12
5	1, 2, 3, -6	3, -6, 1, 2	18	1, 2, -6, 3	´-6, 3, 1, 2	12
6	1, 2, -6, 3	2, -6, 1, 3	19	´-1, -2, -3 ,6	6, -3, -1, -2	13
7	´-1, -3, -2, 6	´-3, -1, - 2, 6	19	1, 2, -6, 3	´-6, 1, 2, 3	13
8	´-1, -3, -2, 6	´-2, -3, -1, 6	20	´-1, -2, 6, -3	´-2, -1, - 3, 6	14
9	1, 2, -6, 3	3, -6, 2, 1	21	´-1, -2, 6, -3	´-2, -3, -1, -6	14
10	´-1, - 2, -3, 6	´-1, -3, -2 6	22	´-1, -3, -2, 6	6, -2, - 1, -3	14
11	1, 3, 2, -6	2, 3, -6, 1	22	1, 2, 3, -6	3, -6, 1, 2	15
12	´-1, -2, -3, 6	´-2, -1, - 3, 6	23	´-1, - 2, -3, 6	6, - 1, - 2, -3	15
13	1, 2, -6, 3	1, -6, 2, 3	23	1, 2, 3, -6	3, -6, 2, 1	15
14	´-1, -2, 6, -3	´-2, -1, 6, -3	23	1, 2, -6, 3	´-6, 3, 2, 1	15
15	1, 3, 2, -6	1, 3, -6, 2	23	1, 2, 3, -6	2, -6, 1, 3	16
16	´-1, -2, 6, -3	´-3, -1, 6, -2	24	´-1, -2, 6, -3	´-1, -2, -3, 6	16
17	´-1, -3, -2, 6	´-2, -1, -3, 6	24	1, 2, 3, -6	2, -6, 3, 1	16
18	´-1, - 2, -3, 6	´-1, -2, -3, 6	25	´-1, - 2, 6, -3	´-1, -3, - 2, 6	16
19	1, 2, 3, -6	2, 3, -6, 1	25	1, 2, -6, 3	´-6, 1, 3, 2	16
20	´-1, -2, 6, -3	´-1, - 2, 6, -3	25	´-1, -3, - 2, 6	6, -1 ,- 2, -3	16
21	1, 2, -6, 3	2, -6, 3, 1	25	1, 3, 2, -6	2, -6, 3, 1	16
22	´-1, -3, -2, 6	´-1, -3, - 2, 6	25	´-1, -3, -2, 6	6, -3, -1, -2	16
23	1, 3, 2, -6	3, 2, -6, 1	25	1 , 2, 3, -6	1, -6, 2, 3	17
24	1, 2, 3, -6	1, 3, -6, 2	26	´-1, -2, -3 ,6	6, -3, -2, - 1	17
25	1, 2, -6 , 3	1, -6, 3 , 2	26	1, 2, 3, -6	1, -6, 3, 2	17
26	1, 2, 3, -6	3, 2, -6, 1	27	1, 2, -6, 3	´-6, 2, 3, 1	17
27	´-1, -2, 6, -3	´-3, -2, 6, -1	27	1, 3, 2, -6	1, -6, 3 , 2	17
28	´-1, -3, -2, 6	´-1, - 2, -3, 6	27	1, 3, 2, -6	3, -6, 2, 1	17
29	1, 3, 2, -6	1, 2, -6 , 3	27	1, 3, 2, -6	1, -6, 2, 3	19
30	´-1, -2, 6, -3	´-1, -3, 6, -2	28	-1, -2, -3, 6	6, -1, - 3, - 2	19
31	1, 2, 3, -6	1, 2, -6, 3	29	1, 3, 2, -6	3, -6, 1, 2	19
32	´-1, 2, 6, -3	´-2, -3, 6, -1	29	´-1, -2, -3, 6	6, -2, -3, -1	20
33	1, 3, 2, -6	3, 1, -6, 2	29	1, 3, 2, -6	2, -6, 1, 3	20
34	1, 2, 3, -6	3, 1, -6, 2	30	´-1, -3, -2, 6	6, - 1, -3, -2	20
35	1, 3, 2 , -6	2, 1, -6, 3	30	´-1, -3, - 2, 6	6, - 3, -2, -1	20
36	1, 2, 3, -6	2, 1, -6, 3	31	´-1, - 3, -2, 6	6 ,- 2, -3, -1	22

A(Restfläche) * 2 = A(Oktogonfläche)= 864 ; A(Restfläche) * 4/5 = A(Oktogonfläche)= 576

432 * 2 = 2 * 432 (2*288+144) * 4/5 = 2*288

Die 8 Zahlen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ -3p & -2p & -p & 6p \end{pmatrix}$ bestimmen für jede Primzahl p>3 ein Oktogon

in einem Rechteck der Länge 6•p LE und der Breite 6 LE.

Alle so erzeugten Oktogone sind ähnliche Figuren.

Sollen alle Rechteckstreifen dieselbe Länge haben, so verringern sich mit größer werdenden Primzahlen die Breiten. Durch das Aneinandersetzen der 36 Streifen für p= 5 bis p= 163 entsteht ein Quadrat.

Die Animationen zeigen die nach dem Flächeninhalt der Oktogone geordneten 36 möglichen Quadrate für einfache und überschlagene Oktogone.