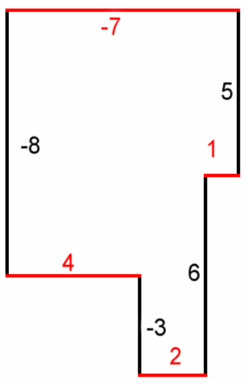
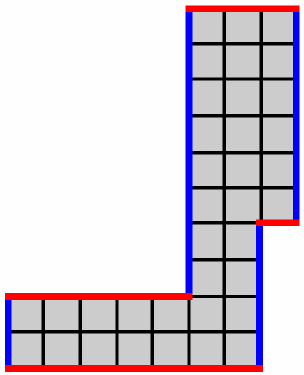
Oktogon - System

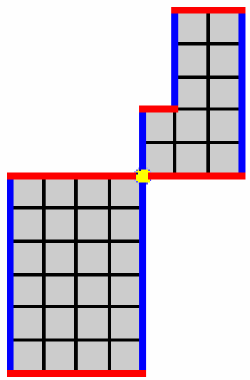
Ausgangspunkt aller Bildkonzepte ist die Untersuchung der (Quadrat-Gitter) Polygone mit kleinster Eckenzahl, und Seitenlängen aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Da die Summen der horizontalen und vertikalen Seitenlängen immer aus zwei Teilsummen mit gleichem Wert bestehen, muss **n durch 4 teilbar** sein. Das Oktogon ist somit das Polygon mit der geringsten Seitenzahl, das die Bedingungen erfüllt.
Außer einfachen gibt es auch einmal bis dreimal überschlagene Oktogone.

Beispiele:

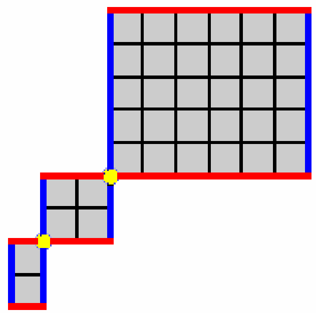




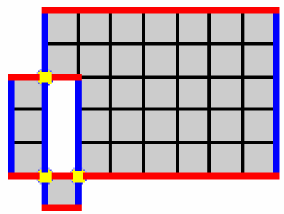
Oktogon,
einfach



Oktogon,
einmal
überschlagen



Oktogon,
zweimal
überschlagen



Oktogon,
dreimal
überschlagen

Jedes Oktogon kann mit der Zeichnung der Oktogonseite der Länge 1 begonnen werden.
Die horizontalen Seitenlängen 1, x2, x3, x4 müssen sich genau wie die vertikalen y1,y2,y3,y4
In je zwei Teilsummen mit gleichem Summenwert zerlegen lassen.
Einschränkung des Summenwertes der horizontalen Seitenlängen auf, 5, 6, 7, 8, 9:
Zum Summenwert 4 oder kleiner gibt es keine geeigneten Summen, da 4 nur durch 1 + 3 und 3 oder 2 durch keine geeignete Summe dargestellt werden kann.
Zum Summenwert 10 oder größer gibt es keine geeigneten Summen, da bereits für 10 die Teilsumme mit 1 nur durch drei Summanden dargestellt werden kann und die 2. Teilsumme dann aus einer Zahl mit dem Wert 10 oder größer bestehen muss.
Wegen : 2 * Sw (x) + 2 * Sw (y) = 36, ist

Sw (y) = ½ * (2 * Sw (x) – 36)

= **Sw (x) – 18.**

Somit gibt es folgende **9 Oktogon-Zerlegungen** der Zahlen 1 bis 8 ,geordnet nach Größe der Summanden und des halben Summenwertes der horizontalen Seitenlängen:

½ Sw(x), ½Sw(y) , (Sw=Summenwert)	**Summen horizontale Seitenlängen.**	**Summen vertikale Seitenlängen**	**Abstimmung (alle Zahlen müssen genau einmal vorkommen)**		**Oktogon - Teilmengen nach Größe geordnet**
1.) **5, 13**	1+4; 2+3	5+8; 6+7	1+4; 2+3	5+8; 6+7	**1;2;3;4 5;6;7;8**
2.) **6, 12**	1+2+3;1+5; 2+4; 6	4+8; 5+7	1+2+3; 6	4+8; 5+7	**1;2;3;6 4;5;7;8**
3.) **7, 11**	1+2+4;1+6; 2+5; 3+4; 7	3+8; 4+7; 5+6	1+2+4; 7	3+8; 5+6	**1;2;4;7 3;5;6;8**
4.)			1+6; 2+5	3+8; 4+7	**1;2;5;6 3;4;7;8**
5.) **8, 1**	1+2+5;1+7; 2+6; 3+5;8	2+8; 3+7; 4+6	1+2+5; 8	3+7; 4+6	**1;2;5;8 3;4;6;7**
6.)			1+7; 3+5	2+8; 4+6	**1;3;5;7 2;4;6;8**
7.) **9, 9**	1+8; 2+7; 3+6; 4+5	2+7; 3+6; 4+5	1+8; 2+7	3+6; 4+5	**1;2;7;8 3;4;5;6**
8.)			1+8; 3+6	2+7; 4+5	**1;3;6;8 2;4;5;7**
9.)			1+8; 4+5	2+7; 3+6	**1;4;5;8 2;3;6;7**

Die Teilmengen { 1;2;3;4}, { 5,6,7,8} der Menge {1; 2 ; 3; 4; 5; 6; 7; 8} etwa bestimmen folgendermaßen ein Oktogon 8-tupel:
Da 1+2+3+4= 2*5, gilt 1 + 4 = 2+ 3 und damit 1 + 4 – 2 – 3 = 0
Da 5+6+7+8= 2* 13, gilt 5 + 8 = 6 + 7und damit 5 + 8 – 6 – 7 = 0
Von allen kongruenten Oktogonen gibt es immer eines, bei
dem man nach dem 1.Linienzug (horizontal um 1LE nach rechts) vertikal nach oben fort fährt und damit dem 1. vertikalen Wert ein positives Vorzeichen gibt.
Entsprechend der Zugführung kann man folgendes Oktogon 8-Tupel aufstellen:
(1; 5; 4; 8;-2; -6; -3; -7)
Jedes Oktogon 8-Tupel legt nach den Permutationen der (schwarzen) horizontalen Seitenlängen (außer 1, da man immer mit 1 beginnen darf) und der (roten) vertikalen Seitenlängen
3! * 4! = 144 Oktogone fest.

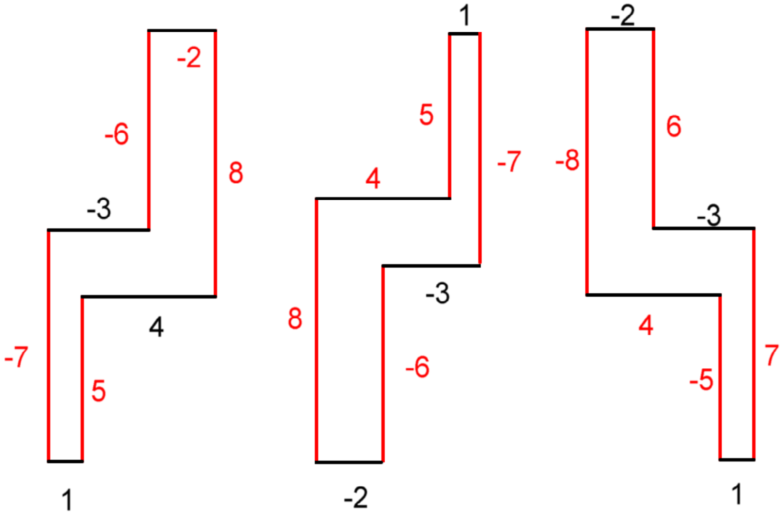
Oktogone aus verschiedenen Gruppen können nicht kongruent sein, wohl aber aus derselben Gruppe.
Kongruente Oktogone müssen aus Drehungen oder Spiegelungen oder Kombinationen aus beiden Abbildungen auseinander hervorgehen.

Damit der horizontale Beginn   mit 1LE erhalten bleibt, darf keine 90° oder 270° Drehung erfolgen.

Höchstens durch die Drehungen um 180° und Spiegelungen können kongruente Oktogone entstehen, welche
beide mit einem 1.Linienzug horizontal um 1LE nach rechts und anschließend vertikal nach oben fortgesetzt werden.

1. Fall: Der letzte vertikale Streckenzug geht nach unten. **(1 5 4 8 -2 -6 -3 -7)**

(1 7 -3 6 -2 -8 4 -5)



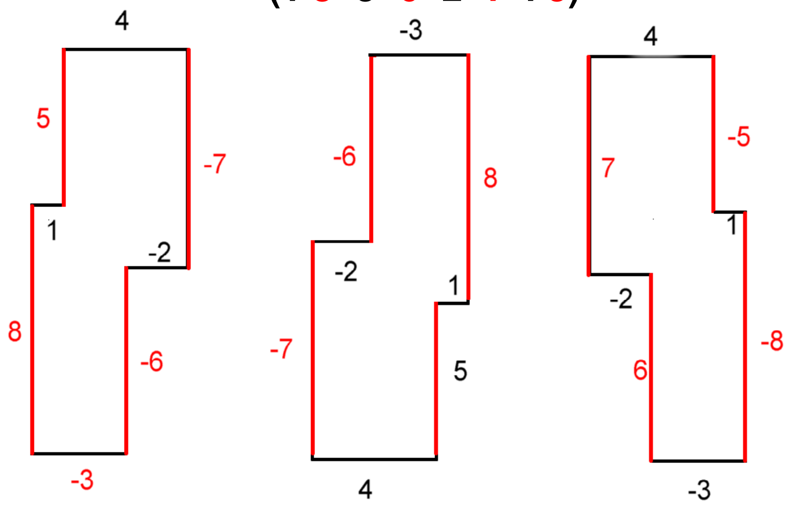
180° gedreht

gespiegelt

Ergebnis der 180° Drehung:
Der erste vertikale Streckenzug geht nach unten.
Das gedrehte Oktogon liegt somit nicht
im Bereich der 9 * 144 zu untersuchenden Oktogone.
Ergebnis der Spiegelung:
Der erste vertikale Streckenzug geht nach oben.
Das gespiegelte Oktogon liegt somit
ebenfalls im Bereich der 9 * 144 zu
untersuchenden Oktogone.

2.Fall: Der letzte vertikale Streckenzug geht nach oben. **(1 5 4 -7 -2 -6 -3 8)**

(1 8 -3 -6 -2 -7 4 5)



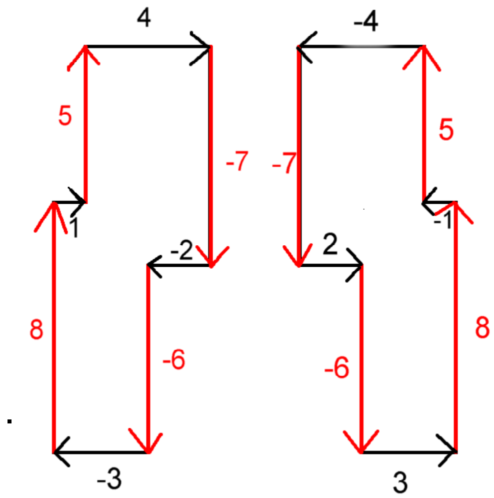
180° gedreht

gespiegelt

Ergebnis der 180° Drehung:
Der erste vertikale Streckenzug geht nach oben.
Das um 180° gedrehte Oktogon liegt somit
ebenfalls im Bereich der 9 * 144 zu
untersuchenden Oktogone.
Ergebnis der Spiegelung:
Der erste vertikale Streckenzug geht nach unten.
Das gespiegelte Oktogon liegt somit nicht
im Bereich der 9 * 144 zu untersuchenden Oktogone.

Die unerwünschten kongruenten Oktogone innerhalb der Menge von 9 * 144 lassen sich somit herausfiltern, wenn man von den 6 Permutationen der horizontalen Längen x2, x3, x4 zunächst folgende Paarbildung vornimmt:
Paar 1: **(x2,x3,x4) , (x4,x3,x2)**
Paar 2: **(x2,x4,x3) , (x3,x4,x2)**
Paar 3: **(x3,x2,x4) , (x4,x2,x3).**

Nicht kongruente Oktogone entstehen genau dann, wenn aus jedem Paar nur eine Permutation gewählt wird.
Somit gibt es zu jeder der 9 Oktogonzerlegungen genau ½ * 3! * 4! = 72 nicht kongruente Oktogone, zusammen also 648.
Sieht man ein Oktogon und sein Spiegelbild als verschieden an, so gibt es genau **1296 = 36²** verschiedene Oktogone.
Das Spiegelbild zu einem beliebigen Oktogon erhält man, wenn man das zu spiegelnde Oktogon im umgekehrten Drehsinn zeichnet:



Die vertikalen Streckenzüge gehen unverändert in dieselbe Richtung, während die horizontalen Streckenzüge jeweils in die entgegen gesetzte Richtung gezeichnet werden.

$$(1\ \ 5\ \ 4\ \ -7\ \ -2\ \ -6\ \ -3\ \ 8) \xrightarrow{\text{Sp.}} (-1\ \ 5\ \ -4\ \ -7\ \ 2\ \ -6\ \ 3\ \ 8)$$

allgemein:

$$(x1\ \ y1\ \ x2\ \ y2\ \ x3\ \ y3\ \ x4\ \ y4) \xrightarrow{\text{Sp.}} (-x1\ \ y1\ \ -x2\ \ y2\ \ -x3\ \ y3\ \ -x4\ \ y4)$$

Die Tabelle ordnet die Oktogonmenge nach der Zahl der Schnittpunkte und den kleinsten umschreibenden Rechtecken (aufsteigend nach Flächeninhalt).

Rechteck	Flächeninhalt		0 Schnittp.	1 Schnittp.	2 Schnittp.	3 Schnittp.
4x8	32			4		4
5x8	40			16		
6x8	48		12	8	12	8
4x13	52			16		
9x6	54			16		
7x8	56		24	28	24	12
9x7	63			32		
8x8	64			16		
5x13	65		24		8	
6x11	66			16		
7x10	70			16		
6x12	72		24	24		
8x9	72			48		
7x11	77		48	24	8	
8x10	80		48	24	8	
9x9	81		72		24	